Mecánica de Materiales II:
Relaciones constitutivas Esfuerzo – Deformación

Andrés G. Clavijo V., Universidad Simón Bolívar

Contenido

- Conceptos
- Ley de Hooke
- Módulo de Young
- Módulo de Poisson
- Relaciones
  - Esfuerzo – Deformación
  - Deformación - Esfuerzo
- Estado plano
  - De Esfuerzos
  - De Deformaciones

Material Homogéneo:

Material que tiene propiedades iguales en cada uno de sus puntos

Material Elástico:

Material que recupera completamente sus dimensiones originales al retirar las cargas que produjeron las deformaciones

Material Lineal:

Material en el cual las deformaciones producidas por la acción de un estado de cargas son muy pequeñas (< 0,1%)

Isótropo:

Material en el que las propiedades físicas son iguales en todas las direcciones

Elástico

Lineal

Para un material homogéneo, elástico, lineal e isotrópico, la matriz de deformaciones depende linealmente de la matriz de esfuerzos:

$$\varepsilon_x = f_{11}\cdot\sigma_x + f_{12}\cdot\sigma_y + f_{13}\cdot\sigma_z + f_{14}\cdot\tau_{xy} + f_{15}\cdot\tau_{xz} + f_{16}\cdot\tau_{yz}$$

$$\varepsilon_y = f_{21}\cdot\sigma_x + f_{22}\cdot\sigma_y + f_{23}\cdot\sigma_z + f_{24}\cdot\tau_{xy} + f_{25}\cdot\tau_{xz} + f_{26}\cdot\tau_{yz}$$

$$\varepsilon_z = f_{31}\cdot\sigma_x + f_{32}\cdot\sigma_y + f_{33}\cdot\sigma_z + f_{34}\cdot\tau_{xy} + f_{35}\cdot\tau_{xz} + f_{36}\cdot\tau_{yz}$$

$$\gamma_{xy} = f_{41}\cdot\sigma_x + f_{42}\cdot\sigma_y + f_{43}\cdot\sigma_z + f_{44}\cdot\tau_{xy} + f_{45}\cdot\tau_{xz} + f_{46}\cdot\tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = f_{51}\cdot\sigma_x + f_{52}\cdot\sigma_y + f_{53}\cdot\sigma_z + f_{54}\cdot\tau_{xy} + f_{55}\cdot\tau_{xz} + f_{56}\cdot\tau_{yz}$$

$$\gamma_{yz} = f_{61}\cdot\sigma_x + f_{62}\cdot\sigma_y + f_{63}\cdot\sigma_z + f_{64}\cdot\tau_{xy} + f_{65}\cdot\tau_{xz} + f_{66}\cdot\tau_{yz}$$

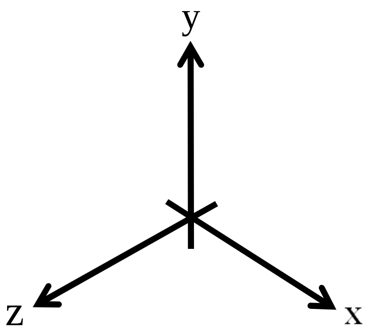
$[f_{nm}] =$ matriz de flexibilidad

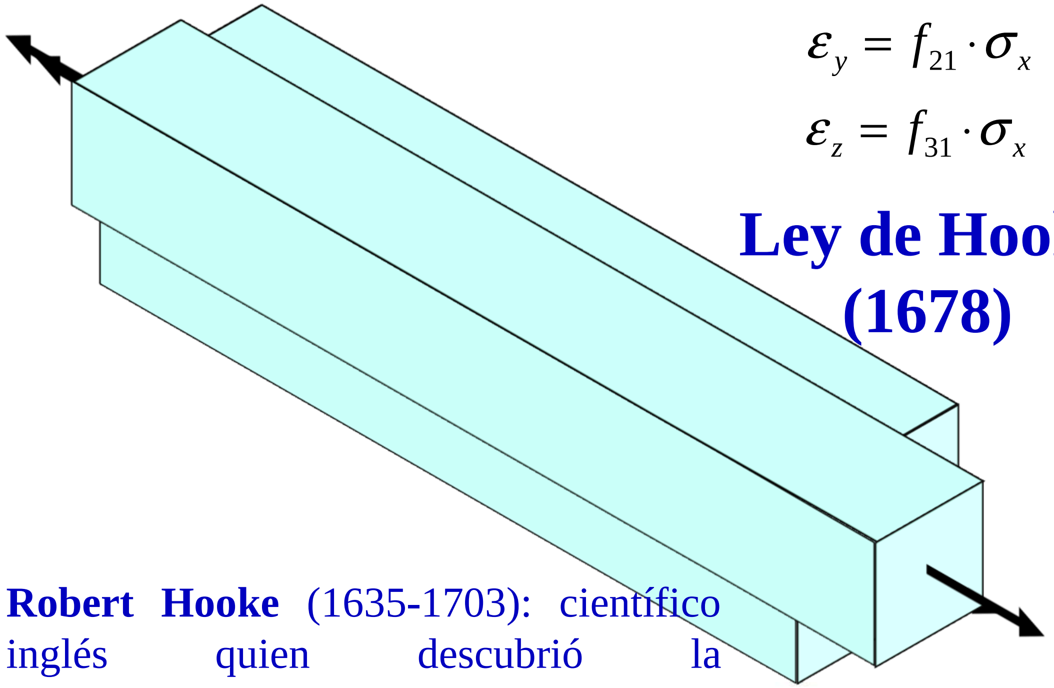
De manera similar, es posible expresar los valores de los esfuerzos en dependencia lineal de las deformaciones:

$$\sigma_x = k_{11}\cdot\varepsilon_x + k_{12}\cdot\varepsilon_y + k_{13}\cdot\varepsilon_z + k_{14}\cdot\gamma_{xy} + k_{15}\cdot\gamma_{xz} + k_{16}\cdot\gamma_{yz}$$
$$\sigma_y = k_{21}\cdot\varepsilon_x + k_{22}\cdot\varepsilon_y + k_{23}\cdot\varepsilon_z + k_{24}\cdot\gamma_{xy} + k_{25}\cdot\gamma_{xz} + k_{26}\cdot\gamma_{yz}$$
$$\sigma_z = k_{31}\cdot\varepsilon_x + k_{32}\cdot\varepsilon_y + k_{33}\cdot\varepsilon_z + k_{34}\cdot\gamma_{xy} + k_{35}\cdot\gamma_{xz} + k_{36}\cdot\gamma_{yz}$$
$$\tau_{xy} = k_{41}\cdot\varepsilon_x + k_{42}\cdot\varepsilon_y + k_{43}\cdot\varepsilon_z + k_{44}\cdot\gamma_{xy} + k_{45}\cdot\gamma_{xz} + k_{46}\cdot\gamma_{yz}$$
$$\tau_{xz} = k_{51}\cdot\varepsilon_x + k_{52}\cdot\varepsilon_y + k_{53}\cdot\varepsilon_z + k_{54}\cdot\gamma_{xy} + k_{55}\cdot\gamma_{xz} + k_{56}\cdot\gamma_{yz}$$
$$\tau_{yz} = k_{61}\cdot\varepsilon_x + k_{62}\cdot\varepsilon_y + k_{63}\cdot\varepsilon_z + k_{64}\cdot\gamma_{xy} + k_{65}\cdot\gamma_{xz} + k_{66}\cdot\gamma_{yz}$$

$$[k_{nm}] = \text{ matriz de rigidez}$$

Supongamos una barra sometida a tracción:





$$\varepsilon_x = f_{11} \cdot \sigma_x$$
$$\varepsilon_y = f_{21} \cdot \sigma_x$$
$$\varepsilon_z = f_{31} \cdot \sigma_x$$

Ley de Hooke (1678)

Robert Hooke (1635-1703): científico inglés quien descubrió la proporcionalidad entre las cargas y los alargamientos experimentando con alambres y resortes.

A principios del siglo XVIII cuando el científico inglés **Thomas Young** (1773-1829) introdujo el concepto de Módulo de Elasticidad, como la constante de proporcionalidad entre los esfuerzos y deformaciones

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$$

El Módulo de Young, como también se le conoce, fue medido por primera vez por el científico francés **Louis Navier** (1785-1836) en 1826.

En 1830 el científico francés **Simeón Poisson** (1781-1829) demostró que :

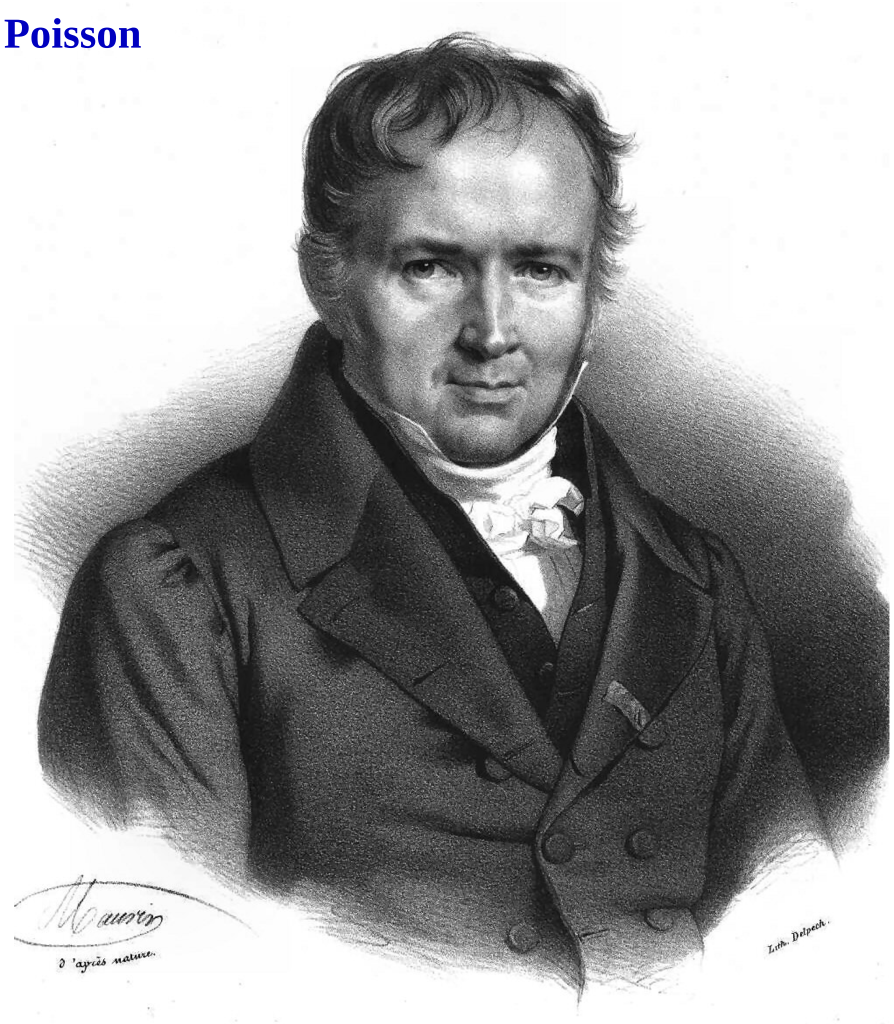
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x$$

Concluyendo que:

$$f_{11} = \frac{1}{E} \qquad f_{21} = f_{31} = -\frac{\nu}{E}$$

Al coeficiente **ν** se le conoce como Módulo de Poisson y para el caso de esfuerzos uniaxial descrito las expresiones son:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \qquad \varepsilon_z = \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x$$



De esta manera volvemos a las expresiones generales que relacionan las deformaciones:

$$\sigma_x = k_{11} \cdot \varepsilon_x + k_{12} \cdot \varepsilon_y + k_{13} \cdot \varepsilon_z + k_{14} \cdot \gamma_{xy} + k_{15} \cdot \gamma_{xz} + k_{16} \cdot \gamma_{yz}$$
$$\sigma_y = k_{21} \cdot \varepsilon_x + k_{22} \cdot \varepsilon_y + k_{23} \cdot \varepsilon_z + k_{24} \cdot \gamma_{xy} + k_{25} \cdot \gamma_{xz} + k_{26} \cdot \gamma_{yz}$$
$$\sigma_z = k_{31} \cdot \varepsilon_x + k_{32} \cdot \varepsilon_y + k_{33} \cdot \varepsilon_z + k_{34} \cdot \gamma_{xy} + k_{35} \cdot \gamma_{xz} + k_{36} \cdot \gamma_{yz}$$
$$\tau_{xy} = k_{41} \cdot \varepsilon_x + k_{42} \cdot \varepsilon_y + k_{43} \cdot \varepsilon_z + k_{44} \cdot \gamma_{xy} + k_{45} \cdot \gamma_{xz} + k_{46} \cdot \gamma_{yz}$$
$$\tau_{xz} = k_{51} \cdot \varepsilon_x + k_{52} \cdot \varepsilon_y + k_{53} \cdot \varepsilon_z + k_{54} \cdot \gamma_{xy} + k_{55} \cdot \gamma_{xz} + k_{56} \cdot \gamma_{yz}$$
$$\tau_{yz} = k_{61} \cdot \varepsilon_x + k_{62} \cdot \varepsilon_y + k_{63} \cdot \varepsilon_z + k_{64} \cdot \gamma_{xy} + k_{65} \cdot \gamma_{xz} + k_{66} \cdot \gamma_{yz}$$

$$[k_{nm}] = \text{ matriz de rigidez}$$

Los coeficientes k_{ij} son 36 propiedades elásticas del material totalmente imprácticas de medir experimentalmente.
Por lo que para un material homogéneo, isótropo, elástico y lineal, es posible demostrar que con 2 propiedades es suficiente.

Teorema

Si un material es homogéneo, elástico, lineal e isótropo, entonces los esfuerzos y deformaciones en cada punto están relacionados a través de las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_x = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_x + \lambda \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_y = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_y + \lambda \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_z = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_z + \lambda \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\tau_{xy} = 2 \cdot G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = 2 \cdot G \cdot \gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = 2 \cdot G \cdot \gamma_{yz}$$

Teorema

Donde λ y G son las dos propiedades elásticas del material conocidos como constantes de Lamé.

En honor al ingeniero francés Gabriel Lamé (1795-1870), cuyas expresiones son:

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)\cdot(1-2\cdot\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)}$$

Al sustituir en las expresiones anteriores se tiene:

Esfuerzo - Deformación

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \right) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \right) \right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \right) \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \gamma_{yz}$$

Deformación - Esfuerzo

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{yz}$$

Estado plano de esfuerzos

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_y$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x]$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = 0$$

Estado plano de deformaciones

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E} \cdot \left[(1-\nu) \cdot \sigma_x - \nu \cdot \sigma_y \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E} \cdot \left[(1-\nu) \cdot \sigma_y - \nu \cdot \sigma_x \right]$$

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot \left[(1-\nu) \cdot \varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot \left[(1-\nu) \cdot \varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x \right]$$

$$\sigma_z = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot \left[\varepsilon_x + \varepsilon_y \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = 0$$